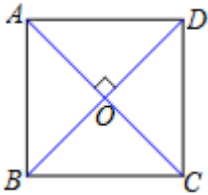


第3讲 正方形的性质与判定

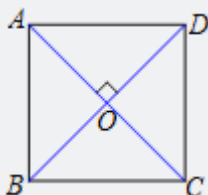
一、正方形的性质

正方形 $ABCD$ 	定义	有一组邻边____，并且有一个角是____的____叫做正方形．
	性质	正方形的四条边都____，对边____． 书写：
		正方形的四个角都是____． 书写：
		正方形的对角线互相____，每一条对角线____一组对角． 书写：
	面积	正方形的面积=____=____

【教法备注】

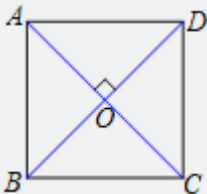
1、正方形的定义：有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形．

正方形 $ABCD$



2、正方形的性质：

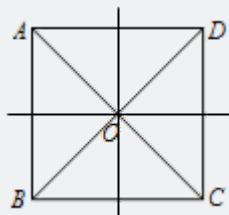
正方形是特殊的平行四边形，既是矩形，又是菱形，因此它具有前三者的所有性质．

图形	性质		符号表示
正方形 $ABCD$ 	边	正方形的四条边都相等 正方形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	正方形的四个角都是直角	$\angle ABC = \angle BCD =$ $\angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	正方形的对角线相等且互相垂直平分 正方形的每一条对角线平分一组对角	$AC = BD, AC \perp BD$ $OA = OC = OB = OD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

3、正方形的对称性：正方形是中心对称图形，也是轴对称图形．

对称性：正方形既是中心对称图形，也是轴对称图形．

正方形有4条对称轴，是对角线所在的直线以及是过连接对边中点的直线．



全等三角形有：

$\triangle ABC \cong \triangle BAD \cong \triangle ADC \cong \triangle BCD$,

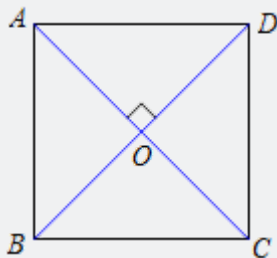
$\triangle AOB \cong \triangle COD \cong \triangle AOD \cong \triangle COB$.

图中所有三角形都是等腰直角三角形．

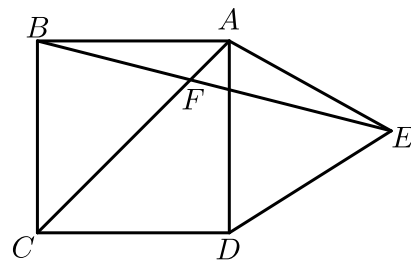
4、正方形的周长和面积：

(1) 正方形的周长：边长的4倍．如图，周长 $C = 4AB$.

(2) 正方形的面积：①边长的平方．②对角线平方的一半．（对角线垂直的四边形的面积求法）



1. 如图，在正方形 $ABCD$ 外侧，作等边三角形 ADE ， AC 与 BE 相交于 F ，则 $\angle CFE$ 为（ ）。



- A. 145° B. 120° C. 115° D. 105°

【答案】 B

【解析】 $\because ABCD$ 为正方形， $\triangle ADE$ 为等边三角形，

$$\therefore AB = AE, \angle BAE = \angle BAD + \angle DAE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ,$$

$\because AC$ 为正方形对角线，

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ, \angle CFB = \angle ABE + \angle BAC = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE = 120^\circ.$$

【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】等边三角形的性质

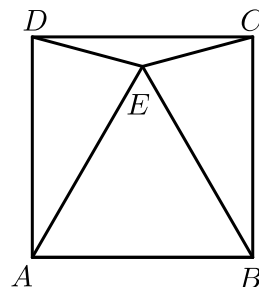
【知识点】三角形内角和的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区初二下学期期中第一学片第10题3分

练习

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\triangle ABE$ 是等边三角形，则 $\angle AED =$ _____。



【答案】 75°

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = BC$,
 $\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形 ,
 $\therefore AB = AE$, $\angle EAB = 60^\circ$,
 $\therefore AD = AE$,
 $\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形 ,
 $\therefore \angle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,
 $\angle AED = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$.

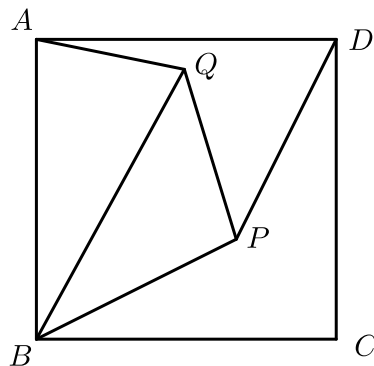
【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】等边三角形的性质

【重点强调】

2017~2018学年天津红桥区初二下学期期末第14题3分

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P, Q 为正方形内的两点，且 $PD = PB$ ， $QB = AB$ ， $\angle CBP = \angle QBP$ ，则 $\angle BQP =$ _____ .



【答案】 45°

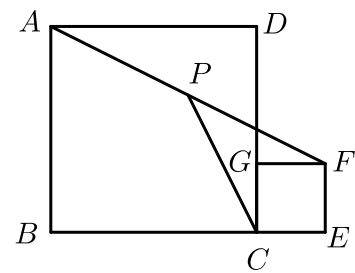
【解析】略

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】正方形的性质

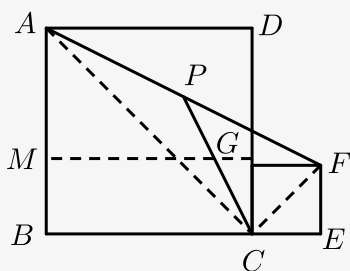
|| 例题

4. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGC$ 的边长分别为3和1，点 G 在边 CD 上，点 E 在 BC 的延长线上， P 为 AF 的中点，连接 PC ，则 PC 的长为 _____ .



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 连接 AC 、 CF ，延长 FG 交 AB 于点 M ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ ，正方形 $EFGC$ ，

$\therefore \angle ACF = 90^\circ$ ，

又 $\because P$ 是 AF 中点，

$\therefore PC = \frac{1}{2} AF$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AMF$ 中， $AF = \sqrt{FM^2 + AM^2}$

$= \sqrt{4^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore PC = \sqrt{5}$ 。

【标注】 【知识点】 勾股定理

【知识点】 两点间的距离公式

【知识点】 正方形的性质

【重点强调】

2017~2018 学年天津津南区初二下学期期末第 17 题 3 分

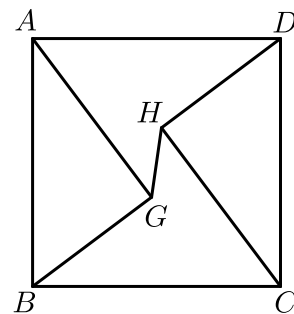
练习

【重点强调】

2016~2017 学年天津和平区天津市益中学校初二下学期期中第 11 题 3 分

5.

如图，正方形 $ABCD$ 的边长为10， $AG = CH = 8$ ， $BG = DH = 6$ ，连接 GH ，则线段 GH 的长为（ ）。



A. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

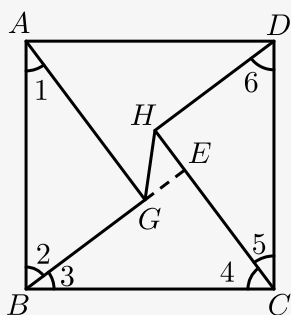
B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{14}{5}$

D. $10 - 5\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 如图，延长 BG 交 CH 于点 E ，



在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDH$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD = 10 \\ AG = CH = 8 \\ BG = DH = 6 \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CDH,$$

$$AG^2 + BG^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle AGB = \angle CHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = \angle 5, \angle 2 = \angle 4 = \angle 6,$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ AB = BC \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle BCE,$$

$$\therefore BE = AG = 8, CE = BG = 6, \angle BEC = \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore GE = BE - BG = 8 - 6 = 2,$$

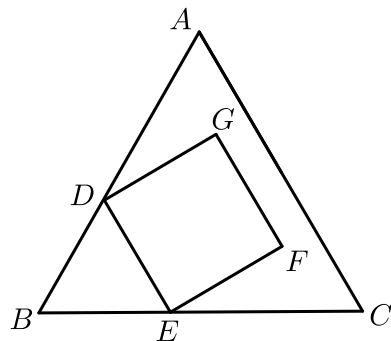
$$\text{同理可得 } HE = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle GHE$ 中, $GH = \sqrt{GE^2 + HE^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

故选B.

【标注】【知识点】正方形的性质

6. 如图为等边三角形 ABC 与正方形 $DEFG$ 的重叠情形, 其中 D, E 两点分别在 AB, BC 上, 且 $BD = BE$. 若 $AC = 18$, $GF = 6$, 则点 F 到 AC 的距离为 ().



A. $6\sqrt{2} - 6$

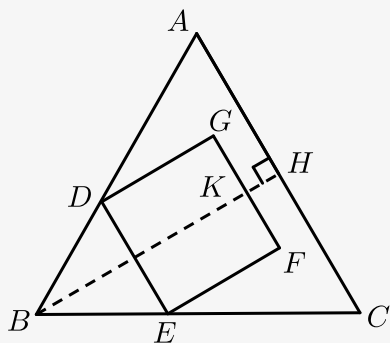
B. $6\sqrt{3} - 6$

C. $2\sqrt{5}$

D. $3\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】如图, 过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H , 交 GF 于 K ,



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A = \angle ABC = 60^\circ$,

$\because BD = BE$,

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BDE = 60^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle BDE$,

$\therefore AC \parallel DE$,

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是正方形, $GF = 6$,

$\therefore DE \parallel GF$,

$\therefore AC \parallel DE \parallel GF$,

$$\therefore KH = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = 6\sqrt{3} - 6,$$

$$\therefore F \text{ 点到 } AC \text{ 的距离为 } 6\sqrt{3} - 6.$$

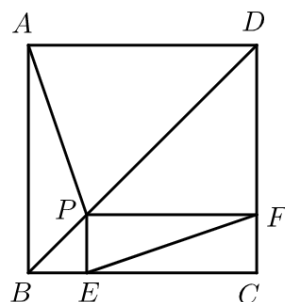
【标注】【知识点】正方形的性质

【重点强调】

2018~2019学年5月天津河西区自立中学初二下学期月考第10题3分

例题

7. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点， $PE \perp BC$ 于点 E ， $PF \perp CD$ 于点 F ，连接 EF 给出下列五个结论：① $AP = EF$ ；② $AP \perp EF$ ；③ $\triangle APD$ 一定是等腰三角形；④ $\angle PFE = \angle BAP$ ；⑤ $PD = 2EC$ ．其中有正确结论的个数是（ ）．



A. 2个

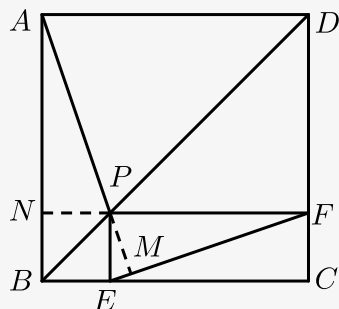
B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】B

【解析】延长 FP 交 AB 于点 N ，延长 AP 交 EF 于点 M ．



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形．

$\therefore \angle ABP = \angle CBD$ ，

又 $\because NP \perp AB$ ， $PE \perp BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $BNPE$ 是正方形， $\angle ANP = \angle EPF$ ，

$\therefore NP = EP$ ，

$$\therefore AN = PF,$$

在 $\triangle ANP$ 与 $\triangle FPE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} NP = EP \\ \angle ANP = \angle EPF, \\ AN = PF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ANP \cong \triangle FPE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AP = EF, \angle PFE = \angle BAP \text{ (故①④正确)};$$

$$\triangle APN \text{ 与 } \triangle FPM \text{ 中, } \angle APN = \angle FPM, \angle NAP = \angle PFM,$$

$$\therefore \angle PMF = \angle ANP = 90^\circ,$$

$$\therefore AP \perp EF, \text{ (故②正确)};$$

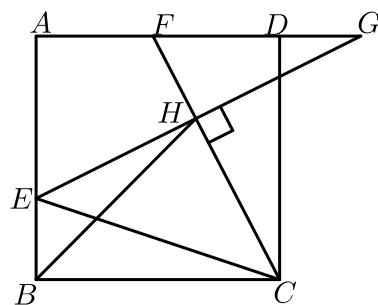
P是BD上任意一点, 因而 $\triangle APD$ 是等腰三角形和 $PD = 2EC$ 不一定成立, (故③⑤错误);

故正确的是: ①②④.

故选B.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

8. 如图, 在边长为 $6\sqrt{2}$ 的正方形ABCD中, E是AB边上一点, G是AD延长线上一点, $BE = DG$, 连接EG, 过点C作EG的垂线CH, 垂足为点H, 连接BH, $BH = 8$. 有下列结论: ① $\angle CBH = 45^\circ$; ②点H是EG的中点; ③ $EG = 4\sqrt{10}$; ④ $DG = 2\sqrt{2}$. 其中, 正确结论的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 如图所示, 连接CG.

在 $\triangle CGD$ 与 $\triangle CEB$ 中

$$\begin{cases} BE = DG \\ \angle EBC = \angle GDC = 90^\circ \\ BC = DC \end{cases}$$

又 $\because \angle EHC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle HEM = \angle HCN .$$
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ EH = CH \\ \angle HEM = \angle HCN \end{cases}$$
$$\therefore HM = HN,$$
$$\therefore BH = 8,$$
$$\therefore CN = BC - BN = 6 - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$
$$\therefore GH = CH = 2\sqrt{10}.$$
$$\therefore CH = 2\sqrt{10}, CN = 2\sqrt{2}.$$
$$\because \angle HNB = 90^\circ, HN = BN = 4\sqrt{2},$$

在Rt△EHC中, $EC = \sqrt{EH^2 + HC^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2} = 4\sqrt{5}$,

$\therefore BE = DG = 2\sqrt{2}$. 故④正确.

10

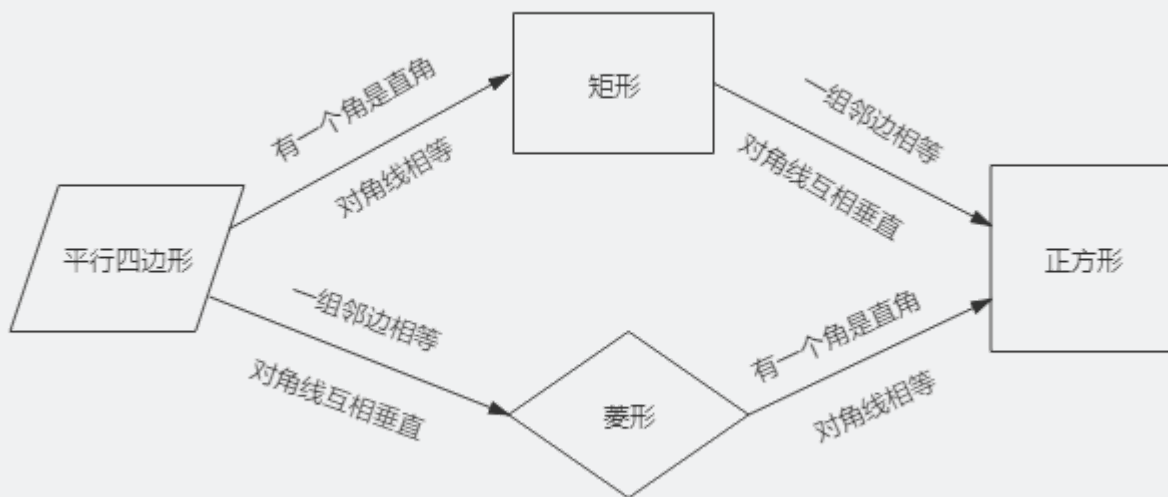
【重点强调】

2018~2019学年5月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第11题

二、正方形的判定

【教法备注】

这部分内容书中没有说明判定的方法，所以学生版不进行体现。



|| 例题

9. 下列说法不正确的是（ ）。
- A. 对角线互相垂直的矩形一定是正方形
 - B. 对角线相等的菱形一定是正方形
 - C. 对角线互相垂直且相等的平行四边形一定是正方形
 - D. 顺次连接任意对角线相等的四边形的各边中点所得的四边形一定是正方形

【答案】 D

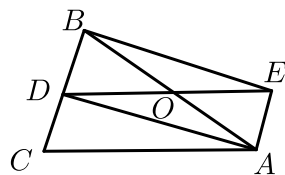
【解析】 A、对角线互相垂直的矩形一定是正方形，正确，不合题意；
B、对角线相等的菱形一定是正方形，正确，不合题意；
C、对角线互相垂直且相等的平行四边形一定是正方形，正确，不合题意；
D、顺次连接任意对角线相等的四边形的各边中点所得的四边形一定是菱形，故此选项错误，符合题意。
故选：D。

【标注】【知识点】区分真假命题

【重点强调】

2016~2017学年天津武清区初二下学期期末第8题3分

10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，点 O 为 AB 的中点，连接 DO 并延长到点 E ，使 $OE = OD$ ，连接 AE ， BE 。



- (1) 求证：四边形 $AEBD$ 是矩形。
(2) 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，矩形 $AEBD$ 是正方形，并说明理由。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\angle BAC = 90^\circ$ 。

【解析】(1) $\because$ 点 O 为 AB 的中点，连接 DO 并延长到点 E ，使 $OE = OD$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形，

$\because AB = AC$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $AEBD$ 是矩形。

(2) 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，

理由： $\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore AD = BD = CD$ ，

$\because$ 由(1)得四边形 $AEBD$ 是矩形，

$\therefore$ 矩形 $AEBD$ 是正方形。

【标注】【能力】推理论证能力

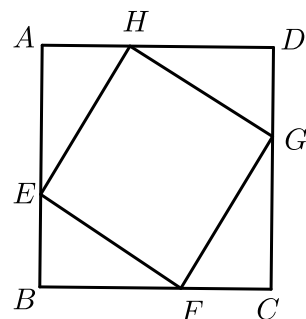
【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】正方形的判定

【重点强调】

2018~2019学年3月天津红桥区天津市方舟中学初二下学期月考第21题8分

11. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为8cm. E 、 F 、 G 分别是 AB 、 BC 、 CD 上的动点，且
 $AE = BF = CG = DH$.



- (1) 求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.
 (2) 判断直线 EG 是否经过某一定点，说明理由.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 直线 EG 经过正方形 $ABCD$ 的中心. 理由见解析.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ, AB = BC = CD = DA.$$

$$\because AE = BF = CG = DH.$$

$$\therefore AH = BE = CF = DG.$$

$$\therefore \triangle EAH \cong \triangle FBE \cong \triangle GCF \cong \triangle HDG.$$

$$\therefore EH = FE = GF = HG, \angle AEH = \angle BFE.$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

$$\because \angle BEF + \angle BFE = 90^\circ, \angle AEH = \angle BFE.$$

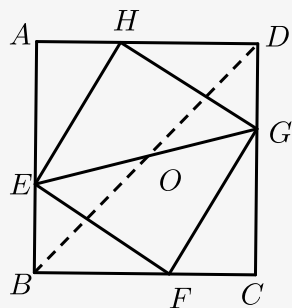
$$\therefore \angle BEF + \angle AEH = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle HEF = 90^\circ.$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形， $\angle HEF = 90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

- (2) 连接 EG ，直线 EG 经过正方形 $ABCD$ 的中心，理由如下：



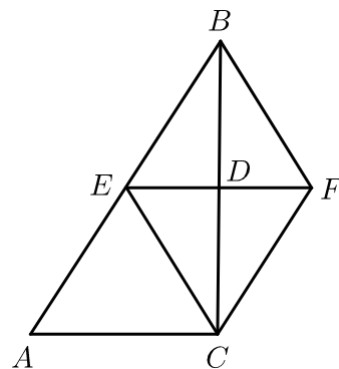
连接 BD 交 EG 于点 O .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 .
 $\therefore AB \parallel DC$.
 $\therefore \angle EBD = \angle GDB$.
 $\therefore \angle EOB = \angle GOD, \angle EBD = \angle GDB, BE = DG$.
 $\therefore \triangle EOB \cong \triangle GOD (\text{AAS})$.
 $\therefore BO = DO$, 即点 O 为 BD 的中点 .
 $\therefore$ 直线 EG 经过正方形 $ABCD$ 的中心 .

【标注】【知识点】正方形与全等综合

练习

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 D , 交 AB 于点 E , 且 $BE = BF$, 添加一个条件, 能证明四边形 $BECF$ 为正方形的是 _____ .
- ① $BC = AC$; ② $CF \perp BF$; ③ $BD = DF$; ④ $AC = BF$.



【答案】 ①②③

【解析】 $\because EF$ 垂直平分 BC ,
 $\therefore BE = EC, BF = CF$,
 $\therefore BF = BE$,
 $\therefore BE = EC = CF = BF$,
 $\therefore$ 四边形 $BECF$ 是菱形 ;
 当 ① $BC = AC$ 时 ,
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$,
 则 $\angle A = 45^\circ$ 时 , 菱形 $BECF$ 是正方形 .
 $\therefore \angle A = 45^\circ, \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EBC = 45^\circ$

$$\therefore \angle EBF = 2\angle EBC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

$\therefore$ 菱形 $BECF$ 是正方形 .

故选项①正确 ;

当 $CF \perp BF$ 时 , 利用正方形的判定得出 , 菱形 $BECF$ 是正方形 , 故选项②正确 ;

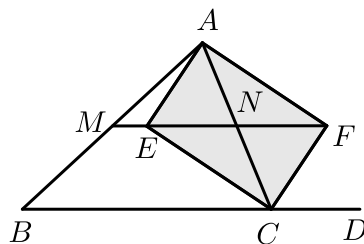
当 $BD = DF$ 时 , 利用正方形的判定得出 , 菱形 $BECF$ 是正方形 , 故选项③正确 ;

当 $AC = BF$ 时 , 无法得出菱形 $BECF$ 是正方形 , 故选项④错误 .

故答案为 : ①②③ .

【标注】【知识点】正方形的判定

13. 如图 : 在 $\triangle ABC$ 中 , CE 、 CF 分别平分 $\angle ACB$ 与它的邻补角 $\angle ACD$, $AE \perp CE$ 于 E , $AF \perp CF$ 于 F , 直线 EF 分别交 AB 、 AC 于 M 、 N .



- (1) 求证 : 四边形 $AECF$ 为矩形 .
 (2) 试猜想 MN 与 BC 的关系 , 并证明你的猜想 .
 (3) 如果四边形 $AECF$ 是菱形 , 试判断 $\triangle ABC$ 的形状 , 直接写出结果 , 不用说明理由 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$.

(3) $\triangle ABC$ 是直角三角形 .

【解析】 (1) $\because CE$ 、 CF 分别平分 $\angle ACB$ 和它的邻补角 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB , \angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACD ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle ACE + \angle ACF$$

$$= \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ACD = 90^\circ ,$$

又 $\because AE \perp CE$, $AF \perp CF$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形 .

(2) $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$, 理由如下 :

$\because$ 四边形 $AECF$ 是矩形 ,

$$\therefore NE = NC , AN = NC ,$$

$$\therefore \angle NEC = \angle NCE = \angle ECB,$$

$$\therefore MN \parallel BC,$$

$$\text{又} \because AN = NC,$$

$\therefore MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC.$$

(3) $\triangle ABC$ 是直角三角形, 理由如下:

$\because$ 四边形 $AECF$ 是矩形,

又 $\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是正方形,

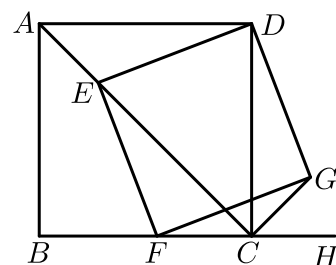
$$\therefore \angle FCA = \angle ACE = \angle ECB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

【标注】【知识点】正方形的判定

14. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 为正方形, $AB = 2\sqrt{2}$, 点 E 为对角线 AC 上一动点, 连接 DE , 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交射线 BC 于点 F , 以 DE 、 EF 为邻边作矩形 $DEFG$, 连接 CG .



(1) 求证: 矩形 $DEFG$ 是正方形.

(2) 探究: $CE + CG$ 的值是否为定值? 若是, 请求出这个定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $CE + CG$ 的值是定值, 为 4.

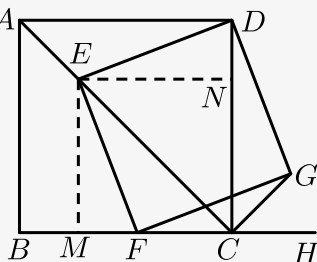
【解析】(1) 过 E 作 $EM \perp BC$ 于 M , 过 E 作 $EN \perp CD$ 于 N ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

形,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\angle ECN = 45^\circ,$$



$$EM = CM = CN = EN ,$$

$$\text{又} \because EM \perp BC , EN \perp CD ,$$

$\therefore$ 四边形 $EMCN$ 是正方形 ,

$$\therefore EM = EN ,$$

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是矩形 ,

$$\therefore \angle FED = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DEN + \angle FEN = \angle FEM + \angle FEN = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DEN = \angle FEM ,$$

在 $\triangle DEN$ 和 $\triangle FEM$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle DEN = \angle FEM \\ EN = EM \\ \angle DNE = \angle FME = 90^\circ \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle DEN \cong \triangle FEM (\text{ASA}) ,$$

$$\therefore EF = ED ,$$

$\therefore$ 矩形 $DEFG$ 是正方形 .

(2) $CE + CG$ 为定值 , 理由如下 :

$\therefore$ 矩形 $DEFG$ 是正方形 ,

$$\therefore DE = DG , \angle EDG = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$$\therefore AD = DC , \angle ADC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EDC + \angle CDG = \angle ADE + \angle EDC ,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle ADE ,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDG$ 中

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle CDG , \\ DE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore AE = CG ,$$

$$\therefore AC = AE + CE = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4 ,$$

$$\therefore CE + CG = 4 .$$

【标注】【知识点】SAS

【知识点】正方形的性质

【知识点】正方形的判定

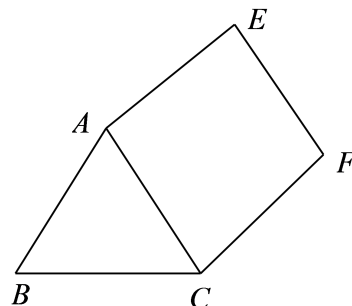
【知识点】矩形的性质

【重点强调】

2018~2019学年天津武清区初二下学期期中第25题10分

15. 已知， $\triangle ABC$ 是等边三角形，四边形 $ACFE$ 是平行四边形， $AE = BC$.

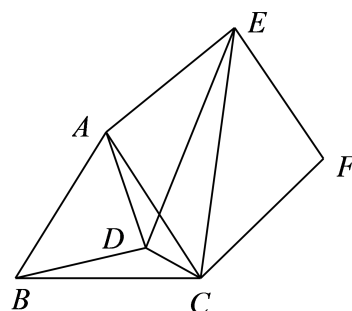
(1) 如图①，求证：平行四边形 $ACFE$ 是菱形 .



图①

(2) 如图②，点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle EDC = 90^\circ$ ， $\angle ABD = \angle ACE$.

求证：平行四边形 $ACFE$ 是正方形 .



图②

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = BC ,$$

$$\text{由} \because AE = BC ,$$

$$\therefore AE = AC ,$$

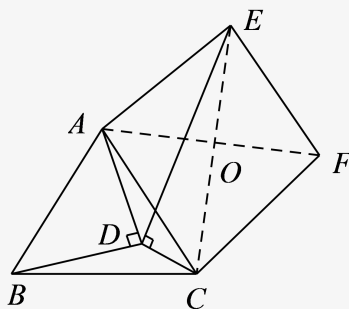
又 $\because$ 四边形 $ACFE$ 是平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $ACFE$ 是菱形 .

(2) 连接 AF ， CE 交于 O ，连接 DO ，

$$\therefore \begin{cases} \angle ABD = \angle ACO \\ \angle ADB = \angle AOC = 90^\circ , \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACO$,
 $\therefore \angle BAD = \angle OAD$, $AD = AO$
 ,
 $\therefore \angle BAD + \angle DAC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle CAO + \angle DAC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DAO = 60^\circ$,
 又 $\because AD = AO$,
 $\therefore \triangle ADO$ 为等边三角形 ,
 $\therefore AD = AO = DO$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EDC$ 中 , O 为斜边中点 ,
 $\therefore OD = \frac{1}{2}CE = CO$,
 $\therefore AO = CO$,
 $\therefore AF = CE$,
 又 $\because$ 菱形 $ACFE$,
 $\therefore$ 菱形 $ACFE$ 为正方形 .



【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等边三角形的判定

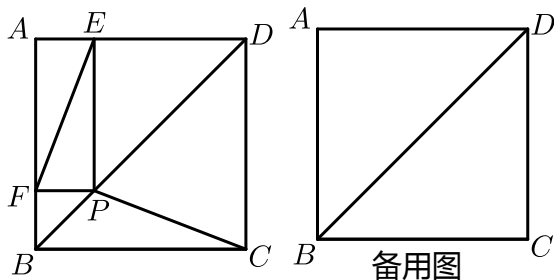
【知识点】等边三角形的性质

【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

【知识点】正方形的判定

【知识点】菱形的判定-从四边形

16. 如图, P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上的一动点 (不与 B 、 D 重合), $PE \perp AD$, $PF \perp AB$, 垂足分别为 E 、 F .



- (1) 求证: 四边形 $AFPE$ 为矩形 .
 (2) 求证: $PC = EF$.
 (3) 当 EF 取最小值时, 判断四边形 $APEF$ 是怎样的四边形? 证明你的结论 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

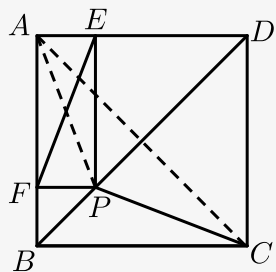
(3) 四边形 $AFPE$ 是正方形 , 证明见解析 .

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore \angle A = 90^\circ$, 且 $PE \perp AD$, $PF \perp AB$,

$\therefore$ 四边形 $AFPE$ 为矩形 .

(2) 如图 , 连接 AC , AP ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore BD$ 垂直平分 AC ,

$\therefore CP = AP$,

$\because$ 四边形 $AFPE$ 为矩形 ,

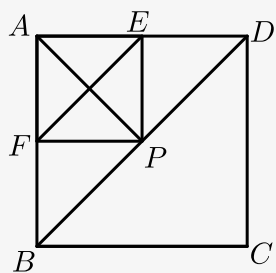
$\therefore EF = AP$,

$\therefore CP = EF$.

(3) 四边形 $AFPE$ 是正方形 ,

理由如下 :

如图 , 当 $AP \perp BD$ 时 ,



EF 取最小值 ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore AB = AD$, $\angle BAD = 90^\circ$,

又 $\because AP \perp BD$,

$\therefore \angle BAP = \angle DAP = 45^\circ$, 且 $PF \perp AB$, $PE \perp AD$,

$\therefore PE = PF$, 且四边形 $AFPE$ 是矩形 ,

$\therefore$ 四边形 $AFPE$ 是正方形 .

【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】矩形的判定-从四边形

【知识点】正方形的判定

【知识点】正方形的性质

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2017~2018学年天津和平区初二下学期期中第25题